

## Varianta 94

### Subiectul I

- a)  $AB = \sqrt{5}$ .
- b) Coordonatele punctului  $P$ , mijlocul segmentului  $[MN]$ , sunt  $x_P = 0$ ,  $y_P = 3$ .
- c)  $\sin x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ .
- d)  $\cos^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{\pi}{7} = 1$ .
- e)  $\bar{z} = 4 + 3i$ .
- f)  $i^2 + i^3 + i^4 = -i$ .

### Subiectul II

1.

- a)  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ .
- b)  $x \in \{-2, 2\}$ .
- c) 4 cărți se pot aranja pe un raft în 24 moduri.
- d)  $x = -2$  și  $y = \frac{3}{2}$ .
- e)  $p = 1$ .

2.

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{8n-2} = \frac{1}{2}$ .
- b)  $\int_{-1}^1 (x^4 + 2) dx = \frac{22}{5}$ .
- c)  $f'(x) = x^2(3 \ln x + 1)$ .
- d)  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow$  funcția  $f$  este crescătoare pe intervalul  $(1, \infty)$ .
- e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ .

### Subiectul III

- a)  $1 \circ 2 = 23$
- b)  $4(x+1)(y+1) - 1 = 4(xy + x + y + 1) - 1 = 4xy + 4x + 4y + 3 = x \circ y$
- c)  $(x \circ y) \circ z = (4xy + 4x + 4y + 3) \circ z =$   
 $16xyz + 16xy + 16yz + 16zx + 16x + 16y + 16z + 15 = x \circ (y \circ z)$
- d) Din  $x \circ e = x, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow 4xe + 4x + 4e + 3 = x, \forall x \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow x(4e+4)+4e+3=x, \forall x \in \mathbf{R}$ . Obținem că  $e = -\frac{3}{4} \in \mathbf{R}$ .

**e)** Folosind **b)** obținem:  $4(x+1)(y+1)-1=-1$ , adică  $(x+1)(y+1)=0 \Rightarrow x=-1$  sau  $y=-1$ .

**f)** Notăm  $P(n): \underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{de\ n\ ori} = 4^{n-1}(a+1)^n - 1, n \in \mathbf{N}^*$ .

Evident  $P(1)$  este adevărată.

Presupunând că  $P(k)$  este adevărată pentru  $k \in \mathbf{N}^*$ , arătăm că  $P(k+1)$  este adevărată.

$$\text{Dar } \underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{de\ k+1\ ori} = \underbrace{(a \circ a \circ \dots \circ a) \circ a}_{de\ k+1\ ori} = [4^{k-1}(a+1)^k - 1] \circ a$$

$$\stackrel{b)}{=} 4[4^{k-1}(a+1)^k - 1 + 1](a+1) - 1 = 4^k(a+1)^{k+1} - 1.$$

Deci  $P(k+1)$  este adevărată. Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că

$$\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{de\ n\ ori} = 4^{n-1}(a+1)^n - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

**g)** Din punctul **f)** obținem  $\underbrace{(x-1) \circ (x-1) \circ \dots \circ (x-1)}_{de\ 2007\ ori} = 4^{2006} \cdot x^{2007} - 1 = -1$ .

Rezultă  $x=0$ .

#### Subiectul IV

**a)** Prin calcul obținem  $x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^4}{x^2 + 1} = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x^2) = -1$ .

**c)**  $f'(x) = 2x - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^2}, \forall x \in \mathbf{R}$ .

**d)** Dacă  $x \in (-\infty, 0]$ , atunci din **c)** rezultă că  $f'(x) \leq 0$ , deci funcția  $f$  este strict descrescătoare pe intervalul  $(-\infty, 0]$ .

**e)**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = +\infty$ .

**f)**  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{3} - 1 + \arctg 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$ .

**g)** Din  $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbf{R}$ , rezultă că  $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$  și  $f(x^2) \geq 0$ ,

$\forall x \in \mathbf{R}$ . Atunci  $0 = f(x) + f(x^2) \geq 0$ , cu egalitate dacă și numai dacă

$f(x) = f(x^2) = 0$ . Rezultă  $x=0$  soluție unică.